Спинорный метод решения систем нелинейных алгебраических уравнений[1]

Общий метод решения систем нелинейных алгебраических уравнений состоит из двух этапов: предварительного, дающего расположение корней, и дальнейшего уточнения корней. К сожалению, если неизвестных больше, чем два, то предварительное определение расположения корней возможно лишь в очень редких случаях [1]. Поэтому метод Ньютона, предназначенный для уточнения грубых приближений к решению, не может быть, вообще говоря, методом, пригодным для нахождения всех решений исходных уравнений (в задачах глобальной оптимизации, например). Метод исключения Эйлера–Сильвестра–Кронекера (метод ЭСК) [2], по крайней мере теоретически, позволяет найти все решения. Идея его заключается в сведении системы n уравнений на n неизвестных к n уравнениям, в каждое из которых входит только одна неизвестная в соответствующей степени. Последние уравнения можно решить с заданной степенью точности. Однако метод ЭКС исключительно громоздок [2]. Очень большие трудности встречает составление системы результантов и кортежей решений.

Исключение неизвестных достаточно легко совершать при линейности уравнений, но встречает трудности, когда уравнения нелинейны. Но оказывается, что исходные уравнения можно так линеаризовать, что каждое решение линеаризованных по неизвестным уравнений будет решением исходной системы, и наоборот. Правда, коэффициентами в линеаризованных уравнениях будут образующие некоторой

---

[1] Авторы: П.Г. Кузнецов, С.Б. Пшеничников (представлено академиком С.П. Новиковым 10.V.1984). Текст публикуется согласно изданию: Доклады АН СССР. Том 283. №5. — М., 1985. — с. 1073–1076.

алгебры. Метод такой линеаризации является обобщением метода факторизации Дирака уравнения Клейна–Гордона [3].

Определим алгебры, использование которых в дальнейшем будет необходимо. *Алгеброй альтернионов* называется ассоциативная алгебра с $2n$ образующими, связанными соотношением [4]

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\varepsilon_i \delta_{ij} e, \tag{1}$$

где ε_i в l случаях равен 1, а в остальных $2n - 1$ случаях равен –1, δ_{ij} — символ Кронекера, e — единица алгебры. Образующие можно представить матрицами R_i так, что $R_i R_j + R_j R_i = 2\varepsilon_i \delta_{ij} E$. Можно выбрать специальное представление, когда компоненты матриц равны 0, 1, –1 [4]. В дальнейшем образующие (1), квадрат которых равен e, будем обозначать символом α_i, а квадрат которых равен $-e$ — символом β_i.

Алгеброй Грассмана называется ассоциативная алгебра, образующие которой связаны соотношением

$$f_i f_j + f_j f_i = 0. \tag{2}$$

Образующие f_i можно выразить через образующие α_i, β_i алгебры (1):

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_k + \beta_m\right),\ f_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_n + \beta_s\right), k \neq n, m \neq s. \tag{3}$$

Алгеброй нильпотентных альтернионов называется ассоциативная алгебра с определяющим соотношением

$$\omega_i^p \omega_j^r + \omega_j^r \omega_i^p = \varepsilon_i \delta^{pr} \tilde{\delta}_{ij}\, e, \tag{4}$$

где индексы p, r пробегают значения от 1 до M; i, j — от 1 до N;

δ^{pr} — символ Кронекера, $\tilde{\delta}_{ij}$ — символ, противоположный по смыслу символу Кронекера δ_{ij} и определяемый: $\tilde{\delta}_{ij} = 1 - \delta_{ij}$. Образующие ω_i^p можно выразить через α_i, β_j по формулам

$$\omega_i^p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_i + \beta_i\right), \ldots, \omega_j^p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_i + \beta_j\right).$$

Равенство верхних индексов влечет при этом равенство α_i в k элементах ω_i^p. В этом случае $\varepsilon_i = 1$. При $\varepsilon_i = -1$ равны β_i в k элементах ω_i^p. Матричное представление ω_i^p определяется заданием соответствующего представления α_i, β_i. Если $p \neq r$, то ω_i^p и ω_j^r. имеют представление, определяемое по формулам (3).

Алгебры (1), (2), (4) можно объединить в единую алгебру с определяющим соотношением

$$\nu_i^p \nu_j^r + \nu_j^r \nu_i^p = 2\varepsilon_i \delta_{ij} \tilde{\delta}^{pr} e + \varepsilon_i \tilde{\delta}_{ij} \delta^{pr} e. \quad (5)$$

Из-за унипотентности α_i, β_j и нильпотентности f_i, ω_i^p, выражаемых через α_i, β_j, алгебру (5) можно назвать единой алгеброй унипотентных и нильпотентных альтернионов, или сокращенно *алгеброй унионов*.

Поставим в соответствие системе квадратных уравнений

$${}^2R_i \equiv a_{ijj} x_j x_j + a_{ikl} x_k x_l + b_{im} x_m + c_i = 0, \quad (6)$$

где коэффициенты a, b, c заданы на поле действительных чисел, i — номер уравнения в системе, число уравнений совпадает с числом неизвестных x_i, систему линеаризованных уравнений

$$B_i\Phi \equiv \begin{pmatrix} \sum\limits_j \alpha_{ijj}\sqrt{a_{ijj}}\,x_j + \sum\limits_{k,l}\omega_1^{ikl}a_{ikl}x_k + \sum\limits_{k,l}\omega_2^{ikl}x_l + \\ \sum\limits_m \omega_1^{im}b_{im} + \sum\limits_m \omega_2^{im}x_m + \alpha_i\sqrt{c_i} \end{pmatrix}\Phi = 0, \qquad (7)$$

где α_{ijj}, ω_1^{ikl}, ω_2^{ikl}, ω_1^{im}, ω_2^{im}, α_i — образующие алгебр (1), (4), которые для упрощения записи с помощью переобозначений типа $\alpha_{111} = \alpha_1$, $\omega_1^{123} = \omega_1^{1}$ можно записать в виде соответствующего числа α_i, β_j, ω_i^p. Столбец Ф имеет порядок, равный порядку матриц, представляющих унионы α_i, β_j, ω_i^p. Для существования общего для n уравнений Ф достаточно, чтобы $B_iBj + B_jB_i = 0$. Тогда заданием неприводимого представления B_i единый для уравнений (7) столбец Ф (спинор в данном случае) определяется с точностью до множителя [4].

Теорема 1. *Каждое решение линейных по неизвестным* x_k *уравнений* (7) *является решением исходных уравнений* (6), *и наоборот*.

Систему уравнений (7) можно записать в матричной форме, близкой к форме линейных уравнений:

$$\Lambda x = Q, \Lambda = \left\|\Lambda_{ij}\right\|, x = \left\|x_j\Phi\right\|, Q = \left\|Q_i\right\|, \qquad (8)$$

где $\Lambda_{ij} = \alpha_{ijj}\sqrt{a_{ijj}} + \omega_1^{ij1}a_{ij1} + \ldots + \omega_1^{ijn}a_{ijn} + \omega_2^{ij}$,

$$Q_i = -\left(\sum_k \omega_1^{ik}b_{ik} + \alpha_i\sqrt{c_i}\right)\Phi.$$

Исключение неизвестных заключается в обращении альтернионной матрицы Λ и умножении (8) слева на Λ^{-1}. Система уравнений (8) примет вид $x = \Lambda^{-1}Q$, а каждое уравнение

$$x_i\Phi = C_i\Phi \text{ или } \left(C_i - x_iE\right)\Phi = 0, \qquad (9)$$

где C_i — альтернионная i строка $\Lambda^{-1}Q$. Таким образом, задача нахождения x_i для (6) переформулирована как задача на собственные значения x_i. Общий спинор Φ (собственный вектор) для n уравнений существует по построению. Каждое характеристическое уравнение для (9) содержит только одну неизвестную.

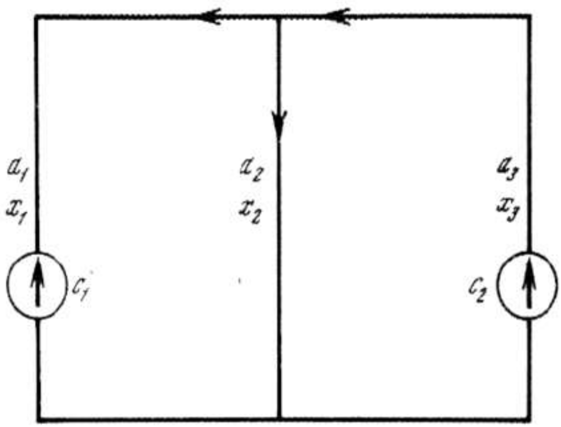

Рис. 1. Двухконтурная сеть.

Определение 1. Будем называть переход от (9) к $x^2\Phi = (C_i)^2\Phi$ *квадрированием* (9) *1-го рода*.

Определение 2. Будем называть переход от $\alpha_i\Phi = F_i\Phi$, где F_i — сумма альтернионных слагаемых, не содержащих α_i, к $\Phi = \tilde{F}_i F_i \Phi$, где $\tilde{F}_i$ — сумма альтернионных слагаемых, получаемая перестановкой F_i и α_i (у некоторых слагаемых в F_i могут измениться знаки), *квадрированием 2-го рода*.

Теорема 2. *Задача на собственные значения* (9) *является специальной задачей на собственные значения. Для получения характеристического уравнения достаточно квадрирований* 1-*и* 2-*го родов и не требуется использования матричного представления* C_i.

Из полученного характеристического уравнения определяются N значений x_i. Для каждого из них восстанавливается после подстановки неприводимого матричного представления унионов соответствующий Ф. Остальные характеристические уравнения находить и решать не нужно, поскольку Ф формирует кортежи решений: $x_j = \Phi^* C_j \Phi$, $\Phi^* \Phi = 1$.

Системы алгебраических уравнений m-го порядка рассматриваются как вырожденные случаи соответствующих систем 2^k порядка и линеаризуются с помощью повторных линеаризаций типа (6) → (7). Для того чтобы унионы k линеаризации коммутировали с унионами $k + 1$ линеаризации, используется свойство кронекеровского произведения матриц, согласно которому $E_p \otimes A_{qq}$ и $B_{mm} \otimes E_n$ коммутируют между собой для любых квадратных матриц A_{qq} и B_{mm}. Это свойство кронекеровского произведения позволяет также значительно сократить порядок Λ. Обращение Λ проще производить блочным методом с помощью перестановочных свойств унионов без использования представления, которое следует использовать только для нахождения Ф.

В качестве примера приведем расчет установившегося режима двухконтурной сети, изображенной на рис. 1 [5]. Пусть зависимость между «током» x_i и «напряжением» y_i на i участке сети аппроксимируется квадратичной зависимостью $y_i = a_i x_i^2$. Квадратичной зависимостью между напором y_i и расходом x_i описываются установившиеся режимы гидравлических сетей [6].

Система уравнений, описывающих сеть, составляется по законам Кирхгофа и имеет вид

$$-a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - c_1 = 0;$$
$$a_2x_2^2 + a_3x_1^2 + 2a_3x_1x_2 + a_3x_2^2 - c_2 = 0,$$

где a_1, a_2, a_3 — гидравлические сопротивления участков, c_1, c_2 — активные напоры.

Система линеаризованных по (7) уравнений имеет вид

$$B_1\Phi \equiv \left(\beta_1\sqrt{a_1}x_1 + \alpha_1\sqrt{a_2}x_2 + \beta_2\sqrt{c_1}\right)\Phi = 0; \qquad (10а)$$

$$B_2\Phi \equiv \begin{pmatrix} \alpha_2\sqrt{a_2}x_2 + \alpha_3\sqrt{a_3}x_1 + \omega_1^1 2a_3x_1 + \\ \omega_2^1 x_2 + \alpha_5\sqrt{a_3}x_2 + \beta_5\sqrt{c_2} \end{pmatrix}\Phi = 0, \qquad (10б)$$

где $\omega_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_4 + \beta_3\right), \omega_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_4 + \beta_4\right).$

Выразим $x_1\Phi$ из (10а):

$$x_1\Phi = C_1\Phi \equiv \left(\beta_1\alpha_1\sqrt{a_2 / a_1}x_2 + \beta_1\beta_2\sqrt{c_1 / a_1}\right)\Phi$$

и подставим в (10б). После этого совершим квадрирование 1-го рода. Получим

$$\begin{bmatrix} \left(a_2 + a_3 + a_2a_3 / a_1\right)x_2^2 - a_3c_1 / a_1 - c_2 + \\ 2a_3x_2\left(\beta_1\alpha_1\sqrt{a_2 / a_1}x_2 + \beta_1\beta_2\sqrt{c_1 / a_1}\right) \end{bmatrix}\Phi = 0.$$

Перенесем слагаемые, содержащие альтернионы, направо:

$$S\Phi \equiv \left[\left(a_2 + a_3 + a_2a_3 / a_1\right)x_2^2 - a_3c_1 / a_1 - c_2\right]\Phi =$$
$$= -2a_3x_2\left(\beta_1\alpha_1\sqrt{a_2 / a_1}x_2 + \beta_1\beta_2\sqrt{c_1 / a_1}\right)\Phi.$$

Совершим еще раз квадрирование 1-го рода:

$$S^2\Phi = 4a_3^2x_2^2\left[\left(a_2 / a_1\right)x_2^2 - c_1 / a_1\right]\Phi.$$

Тогда характеристическое уравнение на x_2 имеет вид

$$S^2 - 4a_3^2 x_2^2 \left[\left(a_2 / a_1 \right) x_2^2 - c_1 / a_1 \right] = 0. \qquad (11)$$

Из (11) определяются четыре значения x_2. Используя неприводимое представление альтернионов, для каждого из них можно найти собственный вектор. Тогда x_1 находится по формуле $x_1 = \Phi^* C_1 \Phi$. Аналогично получаются остальные три кортежа $(x_1^i; x_2^i)$.

Описанный выше метод исключения применим к системам нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволяет при анализе динамических систем изучать многомерную фазовую траекторию системы по соответствующим фазовым портретам на плоскостях.

Авторы выражают признательность акад. В.Г. Афанасьеву, акад. В.С. Семенихину и проф. Г.А. Зайцеву за полезные советы и консультации.

Литература

1. Бут Э.Д. Численные методы. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 240 с.
2. Ван дер Варден Б.Л. Современная алгебра. — М.: Л.: ОНТИ, 1937, ч. 2. — 210 с.
3. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 434 с.
4. Зайцев Г.А. — ДАН, 1964, т. 156, №2. — с. 294–297.
5. Пшеничников С.Б., Генварев А.А. — Изв. вузов. Энергетика, 1984, №4. — с. 113–116.
6. Хасилев В.Я. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1964, №1. — с. 69–88.

Поступило 23.VII.1984.